Θ.Ε.Μ.Α.

19/12/16

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός: Θα λέμε ότι τα σύνολα A & B έχουν την ίδια ισχύ (ή τον ίδιο πληθικό αριθμό / είναι ισοδύναμα) αν υπάρχει μια συνάρτηση από το $A \to B$ 1-1 και επί. (Συμβολισμός: $A \simeq B$)

Παραδείγματα: $\mathbb{N}_a \simeq \mathbb{N}$

$$f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{N}$$
$$2k \mapsto k$$
$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{N}_a$$

$x, y: f(x) = f(y)$ $\in \mathbb{N}_a \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2}$ $\Rightarrow x = y$ 1-1

f επί: για $k \in \mathbb{N}$ είναι $2k \in \mathbb{N}_a$ με $f(2k) = \frac{2k}{2} = k$ δηλ. f επί

Παρατήρηση: $f^{-1}: A \xrightarrow[1-1]{\text{επί}} B$

Πρόταση: Για A, B, C σύνολα ισχύει:

(i) $A \simeq A$

(ii) $A \simeq B \Leftrightarrow B \simeq A$

(iii) $\left.\begin{array}{l} A \simeq B \\ B \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A \simeq C$

Απόδειξη: (iii) $A \simeq B$ σημαίνει ότι $\exists f: A \xrightarrow[1-1]{\text{επί}} B$

$B \simeq C$ $\qquad \exists g: B \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} C$

Παρατηρώ τη σύνθεση $g \circ f: A \to C$. Πράγματι είναι $D_{g \circ f} = \{x \in A : f(x) \in D_g\} =$ $\{x \in A : f(x) \in B = f(A)\} = A$

Επειδή g, f: 1-1 έπεται ότι (?) η $g \circ f$ είναι 1-1. Επίσης $(g \circ f)(A) = g(f(A))$

f επί: $g(B)$ | δηλ $(g \circ f)(A) = C$

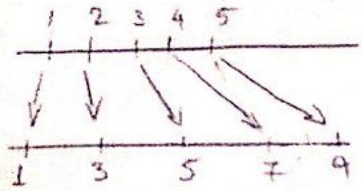
g επί: C | Άρα $g \circ f$ επί

Άρα η $h: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} C$, άρα $A \simeq C$.

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathbb{N}_\alpha \simeq \mathbb{N}$.

Αποδεικνύω ότι $\mathbb{N}_\pi$ (σύνολο περιττών) $\simeq \mathbb{N}$. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\pi = [1, 3, 5 \ldots]$

$x \to 2x-1$



$x, y \in \mathbb{N}$

$f(x) = f(y)$

$2x - 1 = 2y - 1$

$x = y$

<u>f επί:</u> αν κ: περιττός $(\kappa+1)$

$\kappa+1$: άρτιος

άρα $\frac{\kappa+1}{2} \in \mathbb{N}$ με $f\left(\frac{\kappa+1}{2}\right) = 2\frac{\kappa+1}{2}$

$\kappa + 1 - \kappa = \kappa$ και επειδή για $\kappa = 1 \Rightarrow f(1$

Άρα f <u>επί</u>.

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : n = \kappa^2, \kappa \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16 \ldots\}$

Είναι $\mathbb{N}_1 \simeq \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ $f(x) = x^2$

$f(x) = f(y)$

$x^2 = y^2$

$(x+y)(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$

Για $x \in \mathbb{N}_1$ παρατηρούμε ότι $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ με $f(\sqrt{x}) = x$.

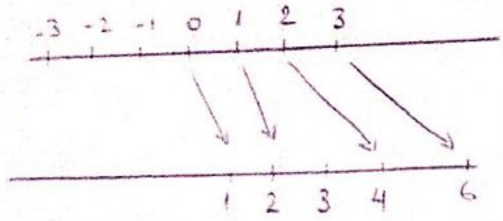
$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{N}_1 \simeq \mathbb{N} \\ \mathbb{N}_\pi \simeq \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{N}_1 \simeq \mathbb{N}_\pi \simeq \mathbb{N} \ldots\ldots$$

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccccc}
\overset{f(1)}{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots\ldots \\
\underset{f(2)}{\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \ldots\ldots & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \ldots &
\end{array}$$

$\frac{m}{n}$ $(m, n) f$

Παράδειγμα: $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$



$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \text{ με } f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 2x, & x>0 \\ -2x+1, & x<0 \end{cases}$$

Για $x, y \in \mathbb{Z}$ με $f(x)=f(y)$ έχουμε:

(i) $x=0$ κ $y>0$ έχουμε $f(0)=1$, $f(y)=2y$, $\Rightarrow 1 \neq 2y$

(ii) $x=0$, $y<0$ . . . άτοπο!

(iii) $x, y>0 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x=y$

(iv) $x, y<0 \Rightarrow -2x+1 = -2y+1 \Rightarrow x=y$

(v) $x>0$, $y<0 \Rightarrow f(x)$ άρτιος, $f(y)$ περιττός άτοπο!

Επί: $1=f(0)$ αν $\kappa \in \mathbb{N}$ τότε $(\kappa \neq 1)$

(i) κ άρτιος $\Rightarrow \frac{\kappa}{2} \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ με $f\left(\frac{\kappa}{2}\right) = 2\frac{\kappa}{2} = \kappa \in \mathbb{Z}$

(ii) κ περιττός $\Rightarrow \frac{\kappa-1}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{\kappa-1}{2} \in \mathbb{Z}$ με $f\left(-\frac{\kappa-1}{2}\right) = \left(\frac{\kappa-1}{2}\right) + 1 = \kappa-1+1 = \kappa$

▶ $\{x \in \mathbb{N} : 5x - 2016 \geq 0\} \simeq \mathbb{Z}$

$\{x \in \mathbb{N} . \ x \geq \frac{2016}{5}\} \simeq \mathbb{Z}$

$\{\cancel{x \in \mathbb{N}} : 404, 405, 406 \ldots\} \simeq \mathbb{Z}$

Αποδεικνύω πρώτα ότι το σύνολο είναι ισοδύναμο του $\mathbb{N}$ και μετά χρησιμοποιώ ότι $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$.

▶ $(-1, 1) \simeq (-\infty, +\infty)$

$f : \mathbb{R} \to (-1, 1) \qquad f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(x) = f(y)$ τότε $\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$

Άρα x, y : ομόσημοι (αν $x = 0$ τότε $f(0) = 0 = \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow y = 0$)

Για $x, y > 0$, είναι $|x| = x$, $|y|$ και $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow$

$x = y$

Ομοίως για $x, y < 0$.

f επί: Ας είναι $\lambda \in (-1, 1)$. Θα αποδείξω ότι $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = \lambda$

▷ $\lambda = 0$ τότε $f(0) = 0 \Rightarrow (x = 0)$

▷ $\lambda > 0$: $\lambda = \frac{x}{1+x} \quad (x > 0)$

$\Rightarrow (1+x)\lambda = x$

$\Rightarrow x\lambda - x = -\lambda \Rightarrow x(\lambda - 1) = -\lambda \Rightarrow x = \frac{\lambda}{1-x}$ // ομοίως για $x < 0$

- $(-1,1) \simeq (0,2) \simeq (0,1)$

  $f(x) = x+1$ // $g(x) = \frac{x}{2}$

- $(a,b) \simeq (-1,1)$

  $\downarrow$

  $(0, b-a)$ $\quad f(x) = x-a$

  $\downarrow$

  $(0,1)$ $\quad f(x) = \frac{x}{b-a}$

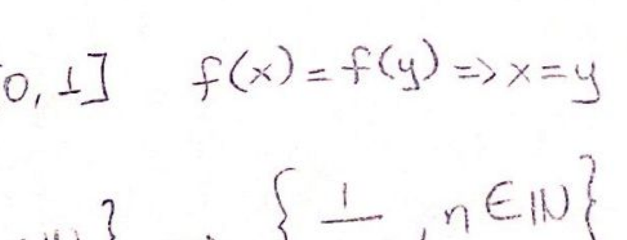
  $\downarrow$

  $(-1,1)$

- $A = (a,b) \cup (\gamma, \delta)$ $\quad$ (Άσκηση)

  $A \simeq \mathbb{R}$

- $[0,1) \simeq (0,1) \; (\simeq \mathbb{R})$



$\frac{1}{n} \to \frac{1}{n+1}$

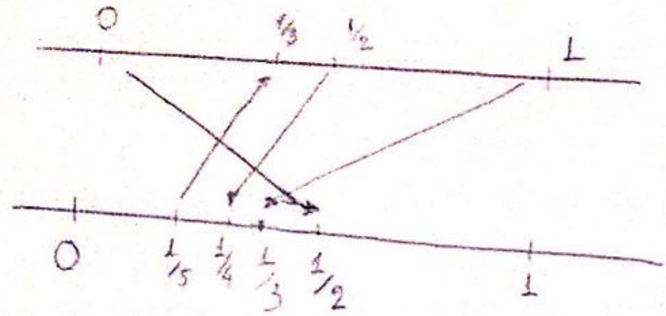
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n} \\ x, & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$x, y \in [0,1]$ $\quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \longrightarrow \left\{ \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathbb{N} \simeq \{ n+1, n \in \mathbb{N} \}$

▸ $[0,1] \simeq (0,1) / \simeq \mathbb{R}$



▸ $[1,+\infty) \simeq [0,1)$

$\leftarrow$

$$f(x) = \frac{2}{1-x} = -\frac{x-1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 \,..$$

<u>Πρόταση</u>: Ας είναι $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$ $(i \neq j)$.
Αν $A_i \simeq B_i$, $(i\in I)$ τότε $\underbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}_{A} \simeq \underbrace{\bigcup_{i\in I} B_i}_{B}$

<u>Απόδειξη</u>: Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f: \bigcup_{i\in I} f_i : A \to B$ είναι 1-1 και επί.

$$f_i : A_i \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B_i, \quad i \in I$$

$$f_i : \{(x, f_i(x)), x \in A_i\}$$

$$f = \bigcup_{i\in I} f_i = \{(x, f(x)) : x \in A_i, i \in I\}$$

$$(x, f_i(x)) \quad (y, f_j(y))$$

$$\in B_i \qquad \in B_j \Rightarrow i = j \Rightarrow$$

$$f_i(x) = f_j(y) \Rightarrow \boxed{x = y}$$